REVISTA DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL (UFMS)

Volume 9, número 21 – Seção Temática – 2016

ISSN 2359-2842

Desenvolvimento do Pensamento Algébrico nos Anos Iniciais por meio da Modelagem Matemática na Educação: possibilidade de utilização de linguagem simbólica

Development of Algebraic Thinking in Early Years by Mathematical Modelling in Education: possibility to use symbolic language

Morgana Scheller[1]

Danusa de Lara Bonotto[2]

Lori Viali[3]

Resumo

Neste artigo se apresenta pesquisa aplicada cujos dados advieram de três práticas de Modelagem Matemática na Educação (MME) desenvolvida com estudantes dos Anos Iniciais de escola pública. Objetiva-se analisar as práticas a fim de demonstrar que a MME possibilita a utilização de linguagem simbólica pelos estudantes. Os dados obtidos, de maio a julho de 2015, por meio de materiais produzidos pelas crianças e gravações de áudio e vídeo das 33 horas/aula. A análise evidenciou que práticas de MME possibilitam ao estudante resolver situações-problema elaborando modelos que perpassam vários registros de representação, utilizando para isto vários tipos de linguagem, inclusive a simbólica. A mediação do professor neste processo foi fundamental ao propiciar condições favoráveis para a observação das generalizações. Destaca-se que a resolução de situações-problema de MME favoreceu significativo desenvolvimento do pensamento algébrico, evidenciando que a linguagem simbólica pode ser de domínio das crianças antes da escolaridade normalmente indicada.

Palavras-chave: Álgebra nos Anos Iniciais, Linguagem simbólica, Pensamento funcional.

Abstract

This paper presents applied research with data obtained through three mathematical modeling practices in Education (MME) developed with students from elementary public school. The goal is to analyze the practices in order to demonstrate that the MME enables the use of symbolic language by students. Data were collected from May to July 2015, using materials produced by children during the practices, and audio and video recordings of

[1] Doutoranda em Educação em Ciências e Matemática; Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul/PUCRS; Instituto Federal Catarinense - Rio do Sul, Rio do Sul, SC, Brasil, morganascheller@yahoo.com.br

[2] Doutoranda em Educação em Ciências e Matemática; Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul/PUCRS; Universidade Federal da Fronteira Sul, Cerro Largo, RS, Brasil, danusabonotto@hotmail.com

[3] Doutor em Engenharia de Produção; Universidades Federal de Santa Catarina/UFSC; Docente da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul/PUCRS, Porto Alegre, RS, Brasil, viali@pucrs.br

33 hours / class. The analysis showed that MME practices allow the student to solve problem situations developing models that run through several representation registers, using for this task, more than a kind of language, including the symbolic. The teacher's mediation in this process was fundamental, in providing favorable conditions for the observation of generalizations. It is noteworthy that, the problem-solving of MMEfavored significant development of algebraic thinking, showing that the symbolic language may be into children domain before the school year usually indicated.
KEYWORDS: Early Algebra, Symbolic language, Functional thoght.

Introdução

O vocábulo 'Álgebra' não é termo comum que surja quando o tema de estudo se refere aos Anos Iniciais da Educação Básica, nem é expressão que se ouve com frequência na sala de aula, tanto por professores como por estudantes, neste nível. No entanto, as pesquisas com enfoque em educação algébrica nos Anos Iniciais estão sendo desenvolvidas, tanto em âmbito nacional como internacional. Procura-se identificar 'o que' e 'como' se trabalhar o campo da álgebra desde o início do Ensino Fundamental. A educação algébrica, assim, tem ampliado espaços nas discussões quando o assunto é o currículo de ensino de álgebra.

A concepção de educação algébrica, ao longo do último século, evoluiu , hoje, o foco do ensino de álgebra possui a ênfase também no desenvolvimento do pensamento algébrico e sua significação, não apenas em atividade de aspecto tradicional como simplificação de expressões algébricas, resolução de equações ou aplicação de regras para operar com símbolos (FIORENTINI; MIORIN; MIGUEL, 1993; FIORENTINI; FERNANDES; CRISTOVÃO, 2005). As Propostas curriculares de vários países contribuíram neste sentido e apresentam versões que incentivam e orientam o desenvolvimento do pensamento algébrico nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, como *National Council of Teachers of Mathematics* - NCTM (2000, 2007), Brasil (2012), agora, mais destacado na segunda versão da Base Nacional Comum Curricular de abril de 2016 (BRASIL, 2016).

Estudos de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), Schoenfeld (1995), Lins e Gimenez (1997), Kieran (1996, 2004), Blanton e Kaput (2005), Schliemann, Carraher e Brizuela (2007), Kaput, Carraher e Blanton (2008) e Canavarro (2007) dentre outros, baseados na evolução histórica da álgebra, apontam para a importância de que o desenvolvimento algébrico e o aritmético ocorram, simultaneamente, anterior aos Anos Finais da Educação Básica. A defesa é decorrente do próprio conceito de álgebra. Segundo NCTM (2000), a "álgebra engloba as relações entre quantidades, o uso de símbolos, a modelagem de fenômenos, e a alteração do estudo matemático" (NCTM, 2000, p. 37). Na perspectiva de Kieran (2007, p. 5):

> Álgebra não é apenas um conjunto de procedimentos envolvendo os símbolos em forma de letra, mas consiste também na atividade de generalização e proporciona uma variedade de ferramentas para representar a generalidade das relações matemáticas, padrões e regras. Assim, a Álgebra passou a ser encarada não apenas como uma técnica, mas também como uma forma de pensamento e raciocínio acerca de situações matemáticas.

Constata-se que na literatura, o conceito de álgebra e sua caraterização são polissêmicos e pesquisadores como Usiskin (1988), Fiorentini, Miorin e Miguel (1993), Kaput (1995), Kieran (1996), dentre outros, apresentam diferentes caraterizações para eles. Assim quando o foco se refere à alfabetização algébrica, no cenário internacional, dentre os estudos, encontra-se a expressão '*Early Algebra'* (EA), utilizada para designar pesquisas cujos objetivos se referem a significado diferente do costumeiro dos Anos Finais. A EA busca o reconhecimento do pensamento algébrico em atividades de matemática nos anos anteriores aos 7º Anos. Trata-se de uma abordagem da Educação Matemática para o ensino da álgebra elementar e também uma área da pesquisa (SCHLIEMANN; CARRAHER; BRIZUELA, 2001; 2008; BLANTON; KAPUT, 2005; CARRAHER ET AL, 2006, CARRAHER; SCHLIEMANN, 2007; CARRAHER; MARTINEZ; SCHLIEMANN, 2008).

Nessa perspectiva, objetivando compreender e caracterizar o pensamento algébrico dos Anos Iniciais, vários autores conceituam o mesmo. Para Blanton e Kaput (2005, p. 413), o pensamento algébrico se refere ao "processo pelo qual os estudantes generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de casos particulares, estabelecem essas generalizações através de discurso argumentativo, e expressam-nas de formas progressivamente mais formais e adequadas à sua idade". Acredita-se que neste processo fazem uso de diferentes registros de representações utilizando linguagens variadas. Para esses autores o pensamento algébrico se subdivide em aritmética generalizada (generalização das operações e o pensamento relacional entre números) e o pensamento funcional (descrição da variação numérica em certo domínio, ideia similar do conceito de função). Nesse último é que pode ser desenvolvida a simbolização de quantidades, operações com elas, além da determinação de relações funcionais e representação gráfica que podem subsidiar a previsão de resultados.

Já na concepção de Kieran (1996, 2004), idealizada a partir de atividades denominadas 'meta nível', o conceito do pensamento algébrico nos Anos Iniciais.

> [...] envolve o desenvolvimento de formas de pensar no âmbito das atividades para as quais a linguagem simbólica pode ser usada como uma ferramenta, mas que não são exclusivas para álgebra e com as quais podem se envolver sem usar qualquer linguagem simbólica, tais como analisar relações entre quantidades, observar a

> estrutura, estudar variações, generalizar, resolver problemas, modelar, justificar, provar e prever (2004, p. 149, Tradução nossa).

Nesta perspectiva, o pensamento algébrico pode ser a base auxiliar para os estudos posteriores, ao longo da vida escolar, pois seu desenvolvimento possibilita que os estudantes: compreendam os padrões, as relações e as funções; representem, analisem as situações e as estruturas matemáticas usando os símbolos algébricos. Também utilizem os modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas e, assim, analisem a mudança (variação) em vários contextos (NCTM, 2007). Carraher; Schliemann; Brizuela (2008) e Kaput (2008) defendem que para que haja desenvolvimento do pensamento algébrico há que se proporcionar aos estudantes condições para a utilização de diferentes representações como as tabelas, as sequências numéricas, os gráficos cartesianos, a notação algébrica simbólica, do mesmo modo a linguagem natural que, na maioria das vezes, as precede. Nesse sentido, necessita-se da utilização de propostas pedagógicas que propicie ao estudante tal desenvolvimento, dentre elas, acredita-se na Modelagem Matemática na Educação, um método de ensino com pesquisa nos limites da sala de aula, segundo concepção de Biembengut (2004; 2014; 2016).

Diferentes são as concepções de Modelagem Matemática para o ensino e aprendizagem surgidas no Brasil a partir da década de 1970. Em decorrência disto, diferentes são os entendimentos de como ela pode ser inserida e utilizada na sala de aula, seja como ambiente de aprendizagem (BARBOSA, 2001), alternativa pedagógica (ALMEIDA; DIAS, 2004), concepção da Educação Matemática (CALDEIRA, 2009), metodologia de ensino (BURAK, 2004) ou método de ensino com pesquisa nos limites e espaços escolares (BIEMBENGUT, 2004, 2014, 2016). As diferentes abordagens irão se diferenciar na sala de aula nos papéis de professor e estudante, no objetivo da Modelagem e no modo de condução do processo.

Para Biembengut (2004, 2014, 2016), a Modelagem (Matemática) é um conjunto de procedimentos necessários para resolução de situação-problema ou compreensão de um fenômeno. Assim esse processo de "perceber o contexto, compreender e explicar por meio da linguagem ou sistemas de símbolos, a seguir, descrever ou representar externamente, é semelhante às fases de nossos processos mentais" (BIEMBENGUT, 2016, p. 103) pode ser adaptado para utilização em espaços escolares sob a denominação então de Modelagem (Matemática) na Educação - Modelação. Portanto, o objetivo da Modelagem na Educação consiste em "promover conhecimento ao estudante em qualquer período de escolaridade, igualmente, ensiná-lo a fazer pesquisa nessa estrutura escolar, isto é: no espaço físico e no período concernente a este propósito” (p. 175). Desta forma, proporciona-se aos estudantes: (i) espaço para o aprendizado do conteúdo do programa curricular a partir de um tema/assunto ou da reelaboração de modelos; e (ii) ao mesmo tempo, orienta-se à pesquisa.

Acredita-se que esse método de ensino para matemática, em que os estudantes não permaneçam na passividade de reproduções de técnicas e algoritmos, sim, aprendendo mais sobre um tema, ao mesmo tempo, sobre matemática, contribui para o desenvolvimento da alfabetização matemática. Consequentemente, do letramento matemático dos estudantes.

As pesquisas de Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática desenvolvidas nos Anos Iniciais evidenciam que atividades em que estudantes resolvem situações-problema autênticas as quais necessitam ser interpretadas e descritas em representações matemáticas tem motivado o processo de ensino e promovido o desenvolvimento da linguagem e do pensamento. As crianças elaborando modelos são capazes de desenvolver sistemas significativos para resolver complexas situações-problema de seu contexto. Destacam-se neste estudo, dentre as identificadas, as pesquisas de English e Watters (2004a, 2004b), Biembengut (2007), Luna e Alves (2007), Luna, Souza e Santiago (2009), English (2006, 2010, 2013), English e Sriraman (2010), Tortola (2012), Tortola e Almeida (2013), Souza e Luna (2014), Luna, Souza e Lima (2015) e estudos da *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) (2000; 2007).

Em relação aos estudos desenvolvidos com estudantes dos Anos Iniciais ou *Early Algebra*, relacionados ao desenvolvimento do pensamento algébrico, além dos anteriormente citados, destacam-se: Falcão (2003), Gomes (2003), Moss et al (2006), Kaput, Carraher e Blanton (2008), Silva e Savioli (2012, 2014) e Luna e Souza (2013). Destas pesquisas, Moss et al (2006), em seus estudos, identificaram que estudantes de oitavos e nonos anos conseguem encontrar regras funcionais para os padrões geométricos e numéricos. No entanto, não utilizam letras/simbologia para representar as variáveis, foco do presente estudo. Os estudos de Schliemann e Carraher (2002), Schliemann, Carraher e Brizuela (2001), Blanton e Kaput (2005), Blanton (2008), Kaput, Carraher e Blanton (2008), Carraher, Martinez e Schliemann (2008), defendem que crianças dos Anos Iniciais já conseguem raciocinar sobre funções podendo descrever em linguagem natural e linguagem simbólica. Esta última utilizada para modelar e resolver equações. Silva e Savioli (2012) verificaram em seu estudo que estudantes do quinto Ano do Ensino Fundamental, em tarefas de matemática na perspectiva da *Early Algebra*, apresentam indícios de pensamento algébrico expresso por meio de estruturas aritméticas e descrição do pensamento utilizado. O estudo confirma a ideia de que estudantes desse nível possuem condições de utilizar e desenvolver o pensamento algébrico, mesmo não utilizando ainda linguagem simbólica.

Deste modo, comparando o potencial da MME com as características do pensamento algébrico dos Anos Iniciais, acredita-se que atividades com Modelagem como método de ensino com pesquisa pode se constituir uma alternativa e potencializar tais características, ou seja, ao identificar e expressar generalizações o estudante desenvolve seu pensamento algébrico e a MME constitui um método que propicia ao estudante condições de, inclusive, expressar simbolicamente generalizações. Fato que, até o momento, não se identificou na literatura ou é realizada apenas com base em padrões aritméticos ou geométricos, desvinculados da realidade das crianças. Pode-se ainda possibilitar a utilização de simbologia para a expressão de generalização que sirva de base para a resolução de situações-problema, utilizando para isto de argumentos plausíveis. Diante dos pressupostos, a problemática que orienta esta pesquisa é: em que medida a MME propicia aos estudantes condições para desenvolvimento do pensamento algébrico de modo que os mesmos expressam no modelo, até mesmo, linguagem simbólica? Em decorrência disso, este estudo objetiva analisar práticas de MME a fim de demonstrar que este método favorece o desenvolvimento do pensamento algébrico, pois possibilita a percepção de generalizações que podem ser expressas em diferentes linguagens, inclusive a simbólica.

Procedimentos Metodológicos

A pesquisa, desenvolvida na perspectiva qualitativa (BOGDAN; BIKLEN, 1994; DENZIN; LINCOLN, 1994), busca compreender os significados que emergem de práticas de MME no cenário natural, em uma Escola Pública Municipal de Ensino Fundamental da Educação Básica do sul do Brasil que oferta ensino regular. A instituição, localizada na região limite do centro da cidade, tem seu funcionamento nos períodos matutinos e vespertinos e, possui atualmente oito turmas. Ela possui trabalhos desenvolvidos, em andamento, na perspectiva de projetos, aos quais são assessorados por uma instituição de extensão rural.

Neste espaço, desenvolveu-se esta pesquisa aplicada durante trinta e três horas/aulas (três a cinco aulas semanais) entre os meses de maio e julho de 2015. Participaram do desenvolvimento de três práticas de MME dezesseis estudantes (metade de cada sexo) do quarto ano vespertino, com idades entre nove e dez anos. Os participantes provêm das localidades do município, a maioria de zona rural. São participativos, críticos e criativos, além de não apresentarem problemas de desenvolvimento cognitivo, apenas um deles é repetente.

Nessas práticas, a condução do processo foi realizada por um dos autores desta pesquisa baseado no fato de que o contato direto do pesquisador com a situação a ser investigada é importante. Também foi assistida pela professora titular da turma, ao qual não havia tido contato com o método de ensino.

Ressalta-se que todas as práticas foram desenvolvidas na perspectiva da *Early Algebra*, frente aos pressupostos de: (i) Diezmann, Watters e English (2002), English e Watters (2004a, 2004b, 2005), Biembengut (2004), Maaß (2005) e English (2010) de que *'a Modelagem já pode e deve ser inserida nos anos iniciais da Educação Básica';* e (ii) Fiorentini, Miorin e Miguel (1993), Kieran (1996, 2004), Blanton e Kaput (2005), Carraher et al (2006), Kaput, Carraher e Blanton (2008), e Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005) dentre outros de que '*estudantes dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, possuem condições de desenvolvimento do pensamento algébrico'*.

O desenvolvimento das três práticas, em sua maior parte ocorrido na sala de aula[4], pautou-se nos procedimentos da Modelagem de Biembengut (2004, 2014, 2016), ao qual se inteirou das denominações das fases do processo cognitivo para adaptar os procedimentos também para os Anos Iniciais, sintetizando-os em três fases:

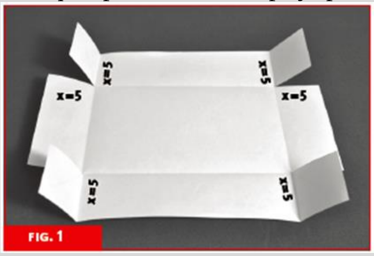
Fase 1) *percepção e apreensão* -> envolve a *percepção* no reconhecimento da situação-problema e *apreensão* na familiarização com o assunto a ser modelado. Nesta fase, os alunos estimulam a percepção, o interesse e buscam inteirar-se do tema a fim de obter vastos dados;

Fase 2) *compreensão e explicitação* -> refere-se a *compreensão* na formulação do problema, da questão e da hipótese, *explicitação* na formulação do modelo matemático. Assim como a explicitação na resolução do problema a partir do modelo encontrado. Nessa fase, proporciona-se às crianças condições de identificar dentre os dados algo que desconheçam ou que merece ser investigado, aprender conceitos que as auxiliem representar alguma coisa em termos de um modelo que resolva a situação-problema;

Fase 3) *significação e expressão* - envolve a *significação* na interpretação da solução e na *avaliação e validação* do modelo e na *expressão* do processo e do resultado. Nesse momento, as crianças, de posse do modelo, interpretam a solução da situação-problema e verificam se ele

[4] Na perspectiva de Biembengut, a coleta de informações complementares, após familiarização inicial com o assunto em geral é feita em espaço extraclasse para, a partir destes, refletir sobre e delimitar o problema.

atende ao pretendido, também organizam, expressando todo o processo no caderno e para demais turmas da instituição.

Prática	Situação-problema
1ª prática	Dentre várias caixas sem tampa de base retangular confeccionadas com uma folha de papel A4, qual possui maior espaço para armazenamento?   Fonte: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1367 (2015).
2ª prática	O que acontece quando cortarmos/fracionamos longitudinalmente a fita de *Möebius* várias vezes? Que percepções se tem ao ir aumentando o número de frações na fita?  Fonte: http://www.unifal-mg.edu.br/extensao/?q=logo_extensao (2015).
3ª prática	Como determinar a numeração do calçado de uma pessoa?  Fonte: http://sergios.com.br/blog/page/75/ (2015).

Quadro 1 – Situações-problemas correspondente em três práticas de Modelagem Matemática desenvolvidas pelos estudantes do quarto ano do Ensino Fundamental.
Fonte: Os autores (2016).

No processo vivenciado, os estudantes se agruparam de acordo com seus interesses (nas duas primeiras práticas). Conforme a orientação do professor pesquisador (na terceira), assim formando grupos heterogêneos. O trabalho iniciava com orientações a serem desenvolvidas nos pequenos grupos, já a discussão geral, com todos, era mediada pelo docente. Destaca-se que os temas e as situações-problema foram sugestões do professor condutor do processo, pois neste método de ensino com pesquisa, a abordagem de conteúdos e a prática da pesquisa se entrelaçam, ocorrendo simultaneamente. Das três práticas realizadas no período, para ilustração de dados a constarem nos resultados, elegeu-se a segunda delas. A escolha se deve ao fato de que a possibilidade de utilização de linguagem simbólica foi mais destacada.

Os dados para análise, constituídos mediante consentimento livre e esclarecido, foram obtidos por meio de materiais produzidos pelos estudantes[5] (E_n) durante as práticas, das observações de natureza não estruturada escritas do professor pesquisador. Também, das transcrições das aulas oriundas de gravações em áudio e vídeo. As análises dos dados foram feitas mediante observação, interpretação e avaliação minuciosas sobre os dados coletados subsidiados pelos conceitos e definições de Pensamento Algébrico e Modelagem Matemática. Na análise se objetivou descrever, compreender e predizer os significados obtidos dos dados a partir da teoria e de estudos similares já desenvolvidos.

Para demonstrar que a Modelagem Matemática na Educação possibilita a utilização de linguagem simbólica por estudantes dos Anos Iniciais, confirmando as condições favoráveis para o desenvolvimento do pensamento algébrico, essa pesquisa foi organizada em três partes: a primeira, destinada para organização/planejamento das atividades denominadas de práticas de Modelagem; na segunda, o desenvolvimento/aplicação em sala de aula das práticas, e na terceira, a análise dos dados, explicitados na sequência.

Resultados e discussão

O material coletado permitiu analisar as práticas de MME e demonstrar que o método de ensino com pesquisa possibilita a utilização de linguagem simbólica por estudantes dos Anos Iniciais. Desse modo, confirmando que tais práticas potencializam condições favoráveis para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Para isso, apresentam-se resultados com dados referentes à segunda prática realizada com os estudantes do quarto ano, denominada '*Uma fita, muitas ideias*'.

A condução primou pelas orientações e incentivos do professor pesquisador a trabalhar com situações nas quais os estudantes perpassassem etapas semelhantes as da pesquisa. Assim contribuindo desta forma para o desenvolvimento do pensamento crítico, criativo e

[5] Como os sujeitos da pesquisa são estudantes menores de idade, mesmo tendo consentimento livre e esclarecido, os nomes serão preservados garantindo o anonimato. Para isto cada um dos 16 estudantes foi identificado por letras maiúsculas: E_1, E_2, ..., E_{16}.

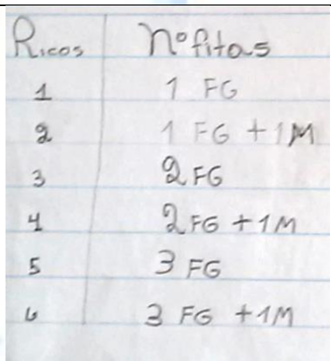
argumentativo. Para tanto, partiu-se da situação-problema que consta no Quadro 2, apresentada aos estudantes posteriormente a fase de percepção e apreensão do tema. Os estudantes, na sequência, apontaram várias estratégias para resolução, as quais foram debatidas a procura da mais viável, passando esta, em seguida, a ser utilizada pela turma.

Situação-problema	Estratégia escolhida
O que acontece quando cortarmos longitudinalmente a fita de *Möebius* várias vezes? Que percepçõe se tem ao ir aumentando o número de frações na fita?	Confeccionar várias fitas de *Möebius* de mesma largura, fracionando cada uma delas em várias partes (ao meio, terça parte, quarta parte, ...). Anotar considerações decorrentes da observação na própria fita, após, todos juntos com o professor anotando na lousa, organizar em tabelas as informações obtidas, observando até o sexto corte, o número de fitas e largura da fita até o fracionamento total de cada uma delas.

Quadro 2 – Estratégia escolhida diante da situação-problema na segunda prática de Modelagem Matemática desenvolvida pelos estudantes do quarto ano do Ensino Fundamental.
Fonte: Os autores (2016).

O Quadro 3 ilustra, inicialmente, a tabela organizada após realizados cortes em várias fitas e observados o número de fitas com o aumentar dos 'riscos', bem como diálogos dos estudantes e da professora durante o processo de estudo. Destaca-se que a ideia de utilização de símbolos para expressão das regularidades foi incentivada pela professora para um '*escrever mais resumido, mais pequenino as informações'*.

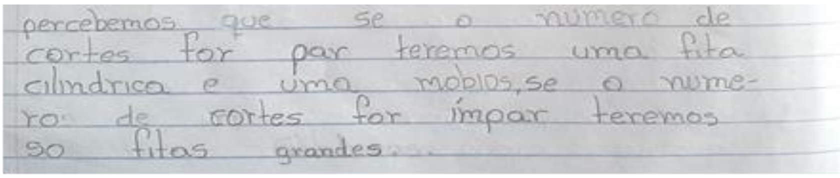
- Já temos até aqui os resultados (referindo-se a uma tabela semelhante à ao lado), e agora, se forem 7 risquinhos na fita, quantas e quais fitas teremos? (Prof.)
- Quatro fitas grandes. (E9)
- Porque vocês acham que não entra a *Möebius* agora? (Prof.)
- Porque na aula passada a gente cortou e viu? (E8)
- Mas e hoje que nós não estamos mais cortando? (Prof.)
- Porque no numérico (referindo-se a coluna direita da tabela) é uma fita grande, depois é uma fita grande com *Möebius*, fita grande e depois fita grande com *Möebius* (A estudante percebendo a regularidade). (E9)
- Vamos ver se isso funciona sempre? E se for 10 riscos? E 100? (Prof.)
- Vai sim, porque ali, o 6 tem *Möebius*, então o 8 e o10 vai ter de *Möebius*, o 40, o 50, o 100 também vai ter, 40 vai ter de *Möebius*, porque todos os pares vão dar *Möebius*, e os impares não. (E8)
- 50 fitas grandes e uma *Möebius* com 100 risquinhos. (E9)
- E porque você pensa ser esta a resposta E9? (Prof.)
- O 50 eu acho porque é metade de 100. (E9)
- Então vamos ver na tabela. O 3 (referindo-se na tabela ao 3FG) é por que é a metade do 6? Então é sempre só pegar a metade de riscos?
- Sim (a turma)



Ricos	nº fitas
1	1 FG
2	1 FG +1M
3	2 FG
4	2 FG +1M
5	3 FG
6	3 FG +1M

Fonte: (E5)

Representação tabular construída por E5 como forma de resumir as informações obtidas.



percebemos que se o numero de cortes for par teremos uma fita cilindrica e uma mobios,se o nume-ro de cortes for impar teremos 50 fitas grandes...

Fonte: (E9)

(Transcrição do fragmento) Percebemos que: se o número de cortes for par teremos uma fita cilíndrica e uma fita de Möebius. Se o número de cortes for ímpar teremos só fitas grandes. (E9)
- O número de fitas é sempre a metade, por exemplo, o 6. A metade de 6 é 3. Então, 3 fitas grandes enroladas. Como é par tem mais uma de Möebius. O 5, a metade de 5 é 2,5. Não dá para ter meia fita, então nós aumentamos 0,5 e ficam 3 fitas. (E5)

Quadro 3 – Material produzido pelos estudantes e algumas transcrições dos diálogos a respeito do número de fitas com o aumento de riscos nas mesmas.
Fonte: Os autores (2016).

De acordo com Brasil (2016), noções intuitivas de função são exploradas desde o quinto ano, por meio de variação proporcional direta entre duas grandezas. No entanto, os resultados ilustrados nos Quadros 3, 4 e 5, comprovam que os estudantes do quarto ano em práticas de Modelagem conseguem extrapolar os objetivos pretendidos pelo documento para o ensino da álgebra nos Anos Iniciais, por meio da reflexão perante as inúmeras fitas cortadas e os dados numéricos organizados. Eles perceberam regularidades, realizaram previsões a partir da expressão da relação entre o número de 'riscos' e o número de fitas obtidas, fazendo uso da língua natural e da linguagem simbólica.

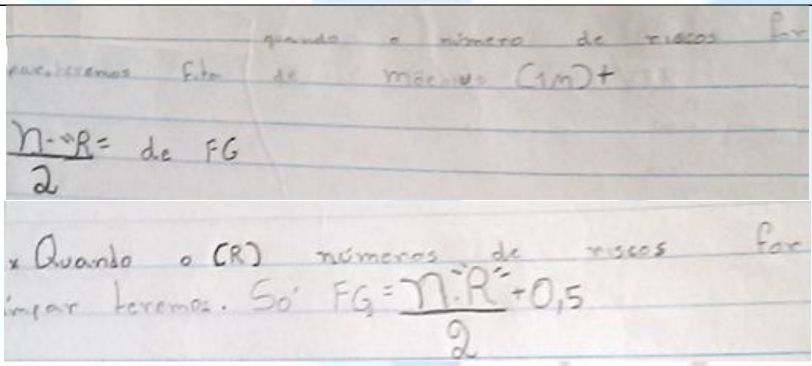
[continuação do diálogo, após continuar a preencher a tabela até 25 riscos.] - Então se eu tiver 100 riscos vai ter ... (Prof.) - (turma completou) 50 fitas grandes e uma *Möebius*. - Ah, pela metade do 100 riscos, vocês chegam no 50? ... E como se encontra a metade de um número? (Prof.) - Prof. a gente divide por 2. (E8) - Então como escrever que de 100 riscos vai dar 50 fitas grandes e uma *Möebius* (Prof. apontando para a tabela), a partir da informação que vocês já tem que sempre é a metade? E se for um número qualquer de 'riscos'? - Oh prof. todas os pares vão dar *Möebius*, e os ímpares não, certo. Então é só escrever 100 dividido por 2 que dá 50 FG mais uma *Möebius*. (E8) - Vamos tentar organizar melhor e escrever mais resumidinho: o que é o 100 aqui? Ele é o número de riscos, certo? [a turma confirma]. Como vocês escolheram escrever as palavras 'números de riscos' bem pequenininho? - 'N' pra número e 'R' pra risco, assim vamos lembrar de 'NR' como número de riscos na fita. (E5) - [a professora escreve NR na lousa] e agora, como registrar esta expressão 'dividido por 2' também bem resumidinho? Vocês lembram do sinal da divisão? (Prof.) [a turma informa os sinais de $\div$ e a 'chave'.].

Quadro 4 – Diálogo durante o processo de obtenção do modelo simbólico.
Fonte: Os autores (2016).

Como a Modelagem na Educação deve propiciar momentos para a abordagem de conceitos/conteúdos de componente curricular na proposta de Biembengut (2016), a mediação da professora foi direcionada para outras formas de representação da divisão necessárias para a expressão simbólica do modelo, visto que os estudantes evocaram duas delas: a barra (/) e a representação fracionária, as quais foram em seguida todas ilustradas na lousa. Na sequência, a professora retoma o processo: "*Então como podemos escrever a informação que é a metade do número de riscos bem resumidinho?*". As formas de representação utilizadas pelos grupos:

NR/2, NR $\div$ 2 e $\frac{NR}{2}$, oriundas da liberdade de expressão de cada grupo, propagam as representações simbólicas para ‘metade no número de riscos’. Destaca-se que esta representação foi precedida por expressão em linguagem natural, uma vez que cada grupo desejava que sua forma fosse aquela a ser registrada na lousa. A chave não foi utilizada devido a mediação feita pela professora, ao qual alegou não ser tão usual essa forma naquela circusntância.

No momento posterior, a professora media o processo por meio de indagações para a compilação das informações, por parte dos estudantes. Solicita que os mesmos expressem, ‘bem resumidinho’ (para extrapolação da linguagem natural), suas percepções a respeito do número de fitas e da largura da fita com o aumento de riscos na fita, tanto para ‘NR par’, quanto ‘ímpar’. O fragmento, a seguir, ilustra um dos modos de representação para expressão pré-simbólica realizada por um grupo o qual E5 era componente.



Fonte: (E5)

(Transcrição do fragmento) - quando o número de riscos for par teremos fita de Möebius (1M) + $\frac{n\,R}{2}$ de FG.

Quando o ‘R’ (que representa número de riscos) for ímpar teremos só FG (fita grande) = $\frac{n\,R}{2}+0{,}5$.

Quadro 5 – Expressão simbólica do primeiro modelo advinda da produção escrita durante o processo.
Fonte: Os autores (2016).

A partir do momento que algumas generalizações (modelos) emergiram, o direcionamento da professora ocorreu no sentido de mediar para a avaliação e a validação das mesmas, etapa prevista na MME. Assim, o ponto de partida de referência para a avaliação do que estavam propondo eram os dados constantes na tabela. Isso indica, de acordo com Biembengut (2016, p. 203), que os estudantes também realizam “uma interpretação empírica para avaliar o quão válido é o modelo”. A seguir, ilustra-se o diálogo do episódio que propiciou a elaboração do segundo modelo: a largura da fita.

- Vocês fizeram um risco e cortaram, certo? E isto é o que vocês obtiveram (mostrando a fita cortada). O que vocês tem a falar sobre isso aqui sem ser sobre o número de fitas? (Prof.)
- Não ficou na mesma forma que a outra. (E4)
- Ficou mais fina. (E9)
- Quanto que posso dizer que ficou mais ‘fina’? (Prof.)
- A metade. (E9)
- Então quer dizer que a largura desta fita é a metade da fita original (M)? (Prof.)
- Sim. (turma)
- Então, se eu faço dois risquinhos e corto, eu estou fazendo com que a fita fique estreita ou larga? (Prof.)
- Estreita. (turma)

...

- Agora, como ficaria se tivesse quatro risquinhos (fez quatro risquinhos na fita e mostrou à turma), em quantas partes estou dividindo a fita? (Prof.)
- Cinco – (E9) [...]
- Se eu olhar pra largura da fita, o que percebemos com o aumento dos cortes? (Prof.)
- Ela fica primeiro na metade (referindo-se também a ½ de M), depois na terça parte, depois na quarta parte da fita inicial. (E9)
- E se fossem 10 riscos (a esta altura escrevendo 10r)? (Prof.) [...]...

– Se lá é 1 (número de riscos) e embaixo é 2 (referindo-se ao denominador da fração), depois com 2r é 3 embaixo, então com 10, vai ser 11 embaixo. (E3)

- E com 100? (Prof.)
- Fica 1 e 101 embaixo. (E3)

...

- E se fizer de repente lá depois disso tudo, ‘r’ risquinhos, um r qualquer (apontando para o denominador), 5, 20, outro valor qualquer, qual vai ser a largura? (Prof.) [Silêncio.] ...
- ‘s’, pois vem depois do r. (E8)
- sim, é o que vem depois. (E4)

Quadro 6 – Expressão simbólica do segundo modelo advinda da produção escrita durante o processo.
Fonte: Os autores (2016).

Nos apontamentos orais e escritos conclusivos se observou que as crianças utilizam conceitos matemáticos e apresentam raciocínio matemático bastante desenvolvido para o nível em que se encontram. Visto que os conceitos matemáticos estão fortemente identificados com quatros tipos de sistemas simbólicos chave (linguagem natural, numérica, geométrica e notação algébrico-simbólica). Cada uma possui função importante a desempenhar e com regras de expressão e lógica interna (SCHLIEMANN, 2003). Movimentar-se de um para outro foi essencial e necessário para os estudantes determinarem o modelo. Fato considerado difícil por Schliemann, mas possível por esses estudantes dos Anos Iniciais. Assim confirmando os apontamentos English (2010) e English e Waltters (2004a, 2004b), os estudantes extrapolaram o simples levantamento de dados. No processo de resolução das situações-problema apresentaram estratégias criativo-reflexivas para resolver as mesmas e diferentes linguagens para um mesmo objeto matemático (modelo) e a utilização de diferentes registros. Isso ora ocorreu pela mediação incentivadora do professor, ora por iniciativa dos próprios estudantes. O papel do professor nas atividades foi determinante para o desenvolvimento do pensamento algébrico, principalmente para que os alunos utilizassem os diferentes registros. Neste estudo, a linguagem natural, principalmente, no formato oral consistiu na forma, inicialmente, utilizada pelos estudantes.

Os estudos de Blanton e Kaput (2005) apontam que as crianças podem desenvolver, a partir de noções intuitivas de função, o senso simbólico quando oportunizadas de utilizar a linguagem simbólica de maneira significativa para ela, fato propiciado neste estudo. Porém, destaca-se que crianças não tem inato o senso de representar a relação de modo formal. A linguagem natural para eles aparentava ser o final da etapa do trabalho, uma vez que ela já resolvia a situação problema. A linguagem simbólica expressa no Quadro 4 só surgiu devido às intervenções do professor de escrever '*mais resumido*' para caber na lousa. Então, percebeu-se que a Modelagem oportunizou transitar da linguagem natural à linguagem simbólica, pois ela proporciona à criança pensar a partir de contextos significativos.

Na segunda generalização, as crianças buscaram expressar o que era mais significativo para elas e a forma utilizada para simbolização fazia sentido naquele contexto. O pesquisador conduziu a discussão para os estudantes concluíssem que a largura da fita seria $L = \frac{1}{r+1}$. No entanto, a linguagem escolhida foi equivalente, com o 's' que vem depois do 'r' no alfabeto para representar a ideia de sucessor, a qual não havia sido reforçada pelo pesquisador. Para Kaput (2008), as crianças devem ser encorajadas a utilizar seus próprios recursos e também a utilizarem a notação convencional, pois todos os dois processos enriquecem e aprofundam os raciocínios algébricos.

A ideia de sucessor foi justificada pelos estudantes na sequência das letras do alfabeto, portanto, a linguagem matemática pode se constituir com auxílio de outros tipos de linguagem. Então, percebeu-se que as crianças conseguem manifestar considerações que levam a emissão de uma generalização. Porém, ainda não dominam uma linguagem simbólica formal uma vez que não é de seu conhecimento, mas já possuem uma que é equivalente. Ilustram desta forma que estão envolvidas em um movimento na zona de desenvolvimento proximal perto do nível de desenvolvimento potencial.

A partir das relações estabelecidas, quando as crianças já descrevem como podem determinar o número de fitas ou a largura da fita sem a necessidade de realizar os cortes, independentemente, do número de riscos nela, estão generalizando. Então, pode-se afirmar que elas estão pensando algebricamente. Este pensamento se manifestou quando os alunos, vivenciaram uma situação, desenvolveram o processo matemático de generalização a partir da observação das fitas e dos dados organizados nos quadros, utilizando variados recursos de linguagem cada vez mais sofisticados,conforme descritos por Kaput (2008) e Carraher; Schliemann; Brizuela (2008): a linguagem visual, a numérica, a natural e a simbólica.

> Por isso, deve-se ressaltar a importância do ensino da pré-álgebra em relação com os saberes aritméticos e o reconhecimento dos textos produzidos pelos alunos acerca das suas compreensões e generalizações desse saber para estabelecimento de relação com os saberes algébricos (LUNA; SOUZA, 2013, p. 823).

Portanto, o pensamento algébrico acaba sendo desenvolvido nos Anos Iniciais quando se trabalha, conjuntamente, com outros ramos da Matemática. A presença das fitas fracionadas, os quadros e tabelas elaboradas, a linguagem natural e a simbólica se tornaram, nesta prática, importantes estruturas no raciocínio matemático das crianças, pois em torno delas que os estudantes desenvolveram o pensar algebricamente. Para Canavarro (2007, p. 106), "a possibilidade de utilização de diversas formas de representação amplia as hipóteses dos alunos mais jovens conseguirem organizar o seu pensamento, para além de facilitar a sua comunicação, nomeadamente ao considerarem-se as representações não convencionais."

Embora o pensamento funcional seja abordado, de forma mais estruturada no currículo, ao final dos Anos Finais e Ensino Médio, o estudo focando generalização por meio das práticas de Modelagem constituiu uma das indicações das pesquisas para o desenvolvimento de EA. Uma vez que nessa prática, os estudantes conseguiram trabalhar de forma crítica e argumentativa com a simbolização de quantidades descobrindo as duas relações funcionais: uma entre 'largura' e 'número de riscos' na fita e outra entre 'número de fitas' e 'número de riscos'. Tais relações propiciaram que estes estabelecessem resultados para 'número de riscos' superiores ao que foi possível encontrar com a prática experimental, conseguindo prever resultados. Dessa forma, vivenciaram a vertente do pensamento algébrico descrito por Blanton e Kaput (2005) referente ao pensamento funcional.

Sendo assim, as crianças ao utilizarem modelos para representação e compreensão das relações quantitativas antecipam os objetivos propostos pelo NCTM (2007) para um nível superior ao que se encontravam (6º ao 9º ano), de modelar e resolver problemas contextualizados utilizando várias representações, tais como gráficos, tabelas e equações. Ademais, a MME propiciou a estas crianças, ao longo do processo, a utilização de simbologia para representar as variáveis, fato não obtido pelos estudantes nos estudos de Moss et al (2006) e Silva e Savioli (2012).

Considerações finais

A pesquisa objetivou analisar práticas de Modelagem Matemática na Educação nos Anos Iniciais a fim de demonstrar que o método propicia condições favoráveis para o desenvolvimento do pensamento algébrico, pois favorece a percepção de generalizações que foram expressas em diferentes linguagens, inclusive a simbólica. Nesse sentido, a partir da análise dos dados evidenciou-se a possibilidade de estudantes do quarto ano do Ensino Fundamental, ao resolverem situações-problema contextualizadas, proporem modelos que favorecem o desenvolvimento do pensamento algébrico ao longo do processo. Isso pode ser percebido quando os estudantes utilizaram as representações para expressá-los por meio de linguagem simbólica, além de variadas linguagens.

Percebeu-se que as crianças em atividades de EA não conseguem obter a generalização (uma fórmula) de modo tão natural e rápido. Elas utilizam suas próprias maneiras de expressão não convencionais. Isso porque não estão acostumadas a utilizar letras para 'escrever resumidinho' e expressar uma variável. O processo de generalização é um processo que exige do professor paciência na mediação de forma a orientar a criança a expressar o que consegue perceber nas várias representações semióticas anteriores à representação algébrica. Trata-se de um processo gradual. A leitura, também o estudo das figuras e das tabelas e a devida reflexão sobre o que está sendo realizado auxilia o estudante a determinar o próximo número não presente na representação. Assim, obter a generalização, expressando-a por meio de uma notação matemática. É um processo de reflexão sobre a ação realizada e a expressão das várias significações dadas a ela.

Este estudo sugere que a Modelagem Matemática na Educação propicia aos estudantes condições para resolver situações-problema utilizando representações semióticas variadas, fazendo uso inclusive de linguagem simbólica antes mesmo do que, geralmente, ocorre ou é recomendado por diretrizes curriculares e NCTM (2007). Neste sentido, um desafio está em efetivar nas salas de aula práticas favoráveis ao desenvolvimento do pensamento algébrico, de modo a romper com práticas tradicionais centradas na figura do professor e desprivilegiadas deste tipo de pensamento.

Quanto às limitações do estudo, a falta de capacitação do professor e sua predisposição em trabalhar com atividades desafiadoras podem se constituir em limitadores para o desenvolvimento do pensamento algébrico por meio da Modelagem Matemática na Educação. Pode ser que o professor regente da turma ao conduzir o processo chegue a resultados, totalmente, diferentes, pois a condução do processo é igualmente importante à organização da prática de Modelagem.

As implicações educativas da pesquisa referem-se à atitude favorável em relação à aprendizagem de matemática que as crianças podem ter ao reconhecer significações possibilitadas por abordagem rica que integra conceitos matemáticos e atividade de pesquisa. Os resultados desse estudo fornecem indícios de que estudantes dos Anos Iniciais conseguem fazer uso de notação algébrica simbólica e demais formas de representação semiótica, fato quase até pouco tempo impensado para alunos deste nível de ensino. Porém, eles só conseguirão se o professor se propuser a realizar destacada mediação, mais enriquecedora ainda. se for ela na perspectiva da investigação. Além disso, os resultados ajudam a evidenciar que a Modelagem Matemática na Educação possibilita a integração de conceitos aritméticos e algébricos. Igualmente, contribuindo para o desenvolvimento do pensamento algébrico, por meio de práticas que envolvem situações-problema reais e não apenas a visualização de padrões aritméticos ou geométricos, que podem não fazer sentido de estudo para as crianças.

Referências

ALMEIDA, L.M.W.; DIAS, M.R. Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como estratégias de ensino e aprendizagem. **Bolema**, Rio Claro, n. 22, p. 19-35, 2004.

BARBOSA, J. C. **Modelagem Matemática**: concepções e experiências de futuros professores. Rio Claro: UNESP, 2001. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, 2001.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem matemática & Implicações no Ensino e na Aprendizagem de Matemática**. 2. ed. Blumenau: Edifurb, 2004.

______. Modelling and applications in primary education. In: BLUM, et. al. (Eds.), **Modelling and applications in mathematics education** – discussion document.New York: Springer, 2007. p. 451-456.

______. **Modelagem no Ensino Fundamental**. Blumenau: Edifurb, 2014.

______. **Modelagem na Educação Matemática e na Ciência.** São Paulo: Livraria da Física, 2016.

BLANTON, M. **Algebra and the Elementary** Classroom: Transforming Thinking, Transforming Practice. Portsmouth, NA: Heinemann, 2008.

BLANTON, M.; KAPUT, J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 5, n. 36, p. 412-446, 2005.

______. Developing elementary teachers' "Algebra eyes and ears".Teaching **Children Mathematics.**Ocotber 2003.Disponívelem: <http://midcentral-coop.org/uploads/ Developing%20Teachers%20Eyes%20&%20Ears.pdf>. Acessoem: 10 ago. 2016.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Lisboa: Porto Editora, 1994.

BRASIL. **Elementos Conceituais e Metodológicos para os Direitos de Aprendizagem e Desenvolvimento do Ciclo de Alfabetização (1º, 2º e 3º anos) do Ensino Fundamental**. Ministério da Educação. Secretária de Educação Básica. Brasília: MEC, SEB, 2012.

______. **Base Nacional Comum Curricular** - proposta preliminar. 2. Versão revista. Ministério da Educação. Secretária de Educação Básica. Brasília: MEC, SEB, 2016. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/#/site/inicio>. Acesso em: 12 ago. 2016.

BURAK, D. A Modelagem Matemática e a sala de aula. In: – I EPMEM – **Anais do I Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática**, 2004, Londrina, PR, 2004. p.1-10.

CALDEIRA, A. D. Modelagem Matemática: um outro olhar. **Alexandria**. Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, Florianópolis, v. 2, n. 2, p. 33-54, jul. 2009.

CANAVARRO, A. P. O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. **Quadrante**, v. 14, n, 2, p. 81-118, 2007.Disponívelem: <https://dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/4301/1/_Quadrante_vol_XVI_2-2007-pp000_pdf081-118.pdf>. Acessoem: 10 jul. 2016.

CARRAHER, D.W.; SCHLIEMANN, A.D.; BRIZUELA, B.B. Algebra in Early Mathematics: A longitudinal Intervention. In: 11th International Congress on Mathematical Education, 2008, Monterrey, Mexico, July, 6-13. **Anais…**, 2008.

______. Can students operate on unknowns? **Proceedings of the Twenty-fifth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. 2001. Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute, 2001. v. 1, p. 130-140.

CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. D.Early algebra and algebraic reasoning. In: LESTER, F. K. (Ed.). **Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. Charlotte, NC: NCTM & Information Age Publishing, 2007. p. 669-705.

CARRAHER, D.W. et al. Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 37, n. 2, p. 87-115, 2006.

CARRAHER, D. W.; MARTINEZ, M. V.; SCHLIEMANN, A. D.Early algebra and mathematical generalization. **ZDM – The International Journal on Mathematics Education**, v. 40, p. 3-22, 2008.

DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. (Eds.).**Handbook of Qualitative Research**. Thousand Oaks London: Sage Publications, 1994.

DIEZMANN, C.; WATTERS, J.; ENGLISH, L. D.Teacher behaviours that influence young children's reasoning. In: COCKBURN, A.; NARDI, E. (Eds.). **Proceedings of the 26th International PME Conference** Norwich: University of East Anglia, 2002. p. 289-296.

ENGLISH, L. D. Modeling with complex data in the primary school. In: LESH, R. et al. (Eds.), **Modeling students' mathematical modeling Competencies**. ICTMA 13. New York: Springer, 2010. p. 287–300.

______. Complex modelling in the primary and middle school years: An interdisciplinary approach. In: STILLMAN, G. A. et al. (Eds.). **Teaching mathematical modelling**: Connecting to research and practice. Dordrecht: Springer, 2013. p. 491-505.

______. Mathematical modeling in the primary school: Children's construction of a consumer guide. **Educational Studies in Mathematics**, v. 63, p. 303-323, nov. 2006.

______; SRIRAMAN, B. (2010).Problem solving for the 21st century. In: SRIRAMAN B.; ENGLISH, L.D. (Eds.). **Theories of mathematics education**: Seeking new frontiers. Berlin: Springer, 2010. p. 263-290.

ENGLISH, L. D.; WATTERS, J. J. Mathematical Modelling with young children. In: HØINES, J.; FUGLESTAD, A. B. (Eds.). **The 28 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. Bergen, 2004a, v. 2, p. 335-342.

______. Mathematical modeling in the early school years.**Mathematics Education Research Journal**, v. 16, n. 3, p. 58-80, 2004b.

FALCÃO, J. T. R. Alfabetização Algébrica nas Séries Iniciais. Como Começar? **Boletim GEPEM**, n. 42, fev./jul., p.27-36, 2003. Disponível em: <https://profvinibeck.files.wordpress.com/2014/12/2003-falcc3a3o.pdf>. Acesso em: 11 jul. 2016.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Contribuição para um Repensar ... a Educação Algébrica Elementar. **Pro-Posições**. São Paulo, v.4, n.1, p. 78-91, mar. 1993. Disponível em: <http://www.proposicoes.fe.unicamp.br/proposicoes/textos/10-artigos-fiorentinid_etal.pdf>. Acesso em: 25 jan. 2016.

FIORENTINI, D.; FERNANDES, F. L. P.; CRISTOVÃO, E. M. **Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico**. 2005. p. 1-22. Disponível em: <ftp://ftp.cefetes.br/cursos/Matematica/Alex/06m%20estudo%20das%20potencialidades%20pedagogicas.pdf>. Acesso em: 03 jul. 2016.

GOMES, M. C. V. Álgebra, Geometria e Aritmética de mãos dadasno Ensino Fundamental. **Boletim GEPEM**, n.42, fev./jul., p.47-59, 2003.

KAPUT, J. J.A research base supporting long term algebra reform? In: OWENS, D. T.; REED, M. K.; MILLSAPS, G. M. (Eds.). **Proceedings of the 17th Annual Meeting of PME-NA.**1995. Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education. v. 1, p. 71-94.

_______. What is algebra? What is algebraic reasoning? In: KAPUT,J.; CARRAHER, D.; BLANTON, M. (Eds.). **Algebra in the Early Grades**. New York: Lawrence Erlbaum Associates, 2008. p. 5-17.

______; CARRAHER, D.; BLANTON, M. (Eds.).**Algebra in the Early Grades**. New York: Lawrence Erlbaum Associates, 2008.

KIERAN, C. The changing face of school algebra. In: ALSINA, C. et al. (Eds.). In: 8thInternational Congress on Mathematical Education: Selected lectures. Sevilha, Espanha: S.A.E.M. Thales, 1996. p. 271-290.

______. Algebraic thinking in the early grades: What is it? **The Mathematics Educator**, v. 8, n. 1, p. 139-151, 2004.

______. Developing algebraic reasoning: The role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels.**Quadrante**, v. 16, n. 1, p. 5-26, 2007.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas, SP: Papirus, 1997.

LUNA, A. V. A.; ALVES, J. Modelagem Matemática: as interações discursivas de crianças da 4ª série a partir de um estudo sobre anorexia. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5. Ouro Preto. **Anais...** Ouro Preto: UFOP, 2007, p. 855-876.

LUNA, A.V.A.; SOUZA, C. C. C. F. Discussões sobre o ensino de álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.15, Número Especial, p.817-835, 2013.

LUNA, A.V.A.; SOUZA, E. G.; SANTIAGO, A. R. C. M. A Modelagem Matemática nas Séries Iniciais: o germén da criticidade. **ALEXANDRIA** Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v. 2, n. 2, 135-157, jul. 2009.

LUNA, A.V.A.; SOUZA, E. G.; LIMA, L. B. S. Mathematical Texts in a Mathematical Modelling Learning environment in Primary School. In: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.). **Mathematical Modelling in Education Research and Practice** – cultural, social and cognitive influences. Switzerland: Springer, 2015. p. 535-543.

MAAß, K. Barriers and opportunities for the integration of modelling in mathematics classes: results of an empirical study. **Teaching Mathematics and Its Application**, v. 24, n. 2-3, p. 61–74, 2005.

MOSS, J. et al.The potential of geometric sequences to foster young students' ability to generalize in mathematics. In: The annual meeting of the American Educational Research Association, 2006, San Francisco. **Proceeding …**, abril, 2006.

NCTM - NATIONAL COUNCIL OF TEACHER OF MATHEMATICS. **Princípios e Normas para a Matemática Escolar**. Trabalho original publicado em 2000. Tradução da Associação de Professores de Matemática (APM). Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional, 2007.

______. Principles and standards for school mathematics. Reston, Virgínia: NCTM, 2000.

SCHLIEMANN, A. D.; CARRAHER, D. W.; BRIZUELA, B. M. **Bringing Out the Algebraic Character of Arithmetic**: From Children's Ideas to Classroom Practice. USA: Lawrence Erlbaum Associates, 2007.

______. When tables become function tables. In: HEUVEL-PANHUIZEN M. (Ed.), Proceedings of the Twenty-fifth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Utrecht, The Netherlands, 2001. v. 4. p. 145-152.

SCHLIEMANN, A. D.; CARRAHER, D. W. The evolution of mathematical understanding: Everyday versus idealized reasoning. **Developmental Review**. v. 22, n. 2, p. 242–266, 2002.

SCHLIEMANN, A. D., et al. (2003). Algebra in Elementary School.**Proceedings of the 27th International Conference for the Psychology of Mathematics Education**. Honolulu, HI, July, 2003.

SCHOENFELD, A. Report of Working Group 1. In: LACAMPAGNE, C. B. (Ed.). **The Algebra Initiative Colloquium**, v. 2: Workingroup papers Washington, DC: U.S. Department of Education, OERI. 1995. p. 11-18.

SILVA, D. P.; SAVIOLI, A. M. P. D. Caracterizações do pensamento algébrico em tarefas realizadas por estudantes do Ensino Fundamental I. **Revista Eletrônica de Educação**. São Carlos, SP: UFSCar, v. 6, n. 1, p. 206-222, mai. 2012. Disponível em: <http://www.reveduc.ufscar.br>. Acesso em: 13 jul. 2016.

______. Manifestação do Pensamento Algébrico em resoluções de tarefas por estudantes do Ensino Fundamental I. **RPEM**, Campo Mourão, v.3, n.5, jul./dez. 2014. Disponível em: <http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/article/view/921>. Acesso em: 12 jul. 2016.

SOUZA, E.; LUNA, A. V. A. Modelagem Matemática nos Anos Iniciais: pesquisas, práticas e formação de professores. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática,** Florianópolis, v. 9, p. 57-73, jul. 2014. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2014v9nespp57/27385>. Acesso em: 10 jul. 2016.

TORTOLA, E. **Os usos da linguagem em atividades de modelagem matemática nos anos iniciais do ensino fundamental**. 2012. 168 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, UEL, Londrina, 2012.

______; ALMEIDA, L. M. W. Reflexões a respeito do uso da modelagem matemática em aulas nos anos iniciais do ensino fundamental. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, Brasília, v. 94, n. 237, p. 619-642, 2013. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/rbeped/v94n237/a14v94n237.pdf>. Acesso em: 10 jul. 2016.

USISKIN, Z. Conceptions of school algebra and uses of variable. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Eds.). **The ideas of algebra, K-12**. Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA

Submetido em setembro de 2016

Aprovado em novembro de 2016